۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۵)

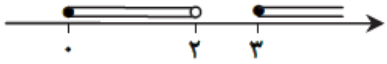
نکته: حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ وجود دارد. اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

نکته: اگر تابع f در یک همسایگی راست (چپ) نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، می‌گوییم حد راست (چپ) تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر عدد L_1 (L_2) است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L_1 (L_2) نزدیک کرد به شرط آنکه متغیر x از سمت راست (چپ) به قدر کافی به a نزدیک شود.

ابتدا دامنهٔ تعریف $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{صورت}: x \geq 0 \quad (1) \\ \text{مخرج}: [x]-2 \neq 0 \Rightarrow [x] \neq 2 \Rightarrow x \in \mathbb{R}-[2,3) \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)\cap(2)} [0,2) \cup [3,+\infty)$$

بنابراین دامنهٔ این تابع به‌صورت زیر است:



طبق نکات و تعریف همسایگی داریم:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ تعریف نمی‌شود

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$ تعریف نمی‌شود

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ تعریف نمی‌شود

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$ تعریف می‌شود

۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس‌های ۲ و ۳، فصل ۵)

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ و $L_2 \neq 0$، آنگاه داریم: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$

می‌دانیم وقتی $x\to 1^+$ عبارت $4-x$ به‌سمت ۳ میل می‌کند. اما از آنجا که $x\to 1^+$ یعنی $x>1$ پس $4-x<3$ یعنی عبارت $4-x$ با مقادیر کمتر از ۳ به‌سمت ۳ میل می‌کند. پس برای یافتن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(4-x)$ باید روی نمودار تابع f از سمت چپ به ۳ نزدیک شویم. پس:

$$\lim_{x\to 1^+} f(4-x) = f(3^-) = -1$$

بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(4-x)}{x+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}=-0/5$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۵)

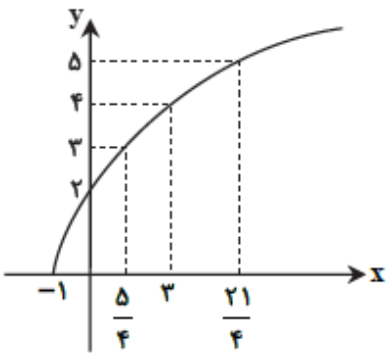
فرض کنید $x=\frac{\pi}{2}+t$ به‌طوری که وقتی $x\to\frac{\pi}{2}^-$، آنگاه $t\to 0^-$؛ داریم:

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+t)}{\sqrt{1+\sin(\frac{3\pi}{2}+3t)}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-\sin t}{\sqrt{1-\cos 3t}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-\sin t}{\sqrt{2\sin^2\frac{3t}{2}}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-\sin t}{-\sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-t}{-\sqrt{2}(\frac{3}{2}t)}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

مؤسسه آموزش فرهنگی

۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۵)

در نقاطی که حاصل عبارت $y=۲\sqrt{x+۱}$ برابر عدد صحیح است، تابع f ناپیوسته است. نمودار این تابع به‌صورت روبه‌رو است. به‌ازای $y=۳$، $y=۴$ و $y=۵$، سه نقطهٔ ابتدایی ناپیوسته تابع با طول‌های مثبت به‌دست می‌آید. داریم:



$$\begin{cases} ۲\sqrt{x_۱+۱}=۳ \Rightarrow x_۱=\frac{۵}{۴} \\ ۲\sqrt{x_۲+۱}=۴ \Rightarrow x_۲=۳ \\ ۲\sqrt{x_۳+۱}=۵ \Rightarrow x_۳=\frac{۲۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow \text{جمع} = ۹/۵$$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۵)

نکته: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول c پیوسته باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

نکته: اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، در تمامی نقاط پیوسته است.

می‌خواهیم عرض نقطه‌ای به‌طول ۱ را پیدا کنیم که با اضافه شدن به تابع f آن را در $x=۱$ پیوسته می‌کند، پس a را باید برابر $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ تعریف کنیم:

$$a=\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{(۳x^۲+x-۴)(x^۲+۳x-۴)}{(x^۲-۲x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۳x+۴)(x-۱)(x+۴)}{(x-۱)^۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۳x+۴)(x+۴)}{۱}=۷\times ۵=۳۵$$

۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۵)

به‌ازای $x=۱$ مخرج کسر برابر صفر است، پس باید صورت کسر نیز برابر صفر باشد:

$$\sqrt{ax+b}-۲=۰ \xrightarrow{x=۱} \sqrt{a+b}-۲=۰ \Rightarrow a+b=۴ \quad (*)$$

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج صورت داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{ax+b}-۲)(\sqrt{ax+b}+۲)}{(x-۱)\underbrace{(x+۴)}_{۵}\underbrace{(\sqrt{ax+b}+۲)}_{۴}}=\lim_{x\to ۱}\frac{ax+b-۴}{۲۰(x-۱)} \overset{(*)}{=\!=} \lim_{x\to ۱}\frac{ax-a}{۲۰(x-۱)}=\frac{a}{۲۰}=\frac{۱}{a-۱} \Rightarrow a^۲-a-۲۰=۰$$

$$\begin{cases} a=۵ \Rightarrow b=-۱ \\ a=-۴ \Rightarrow b=۸ \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای b برابر ۷ است.

۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۵)

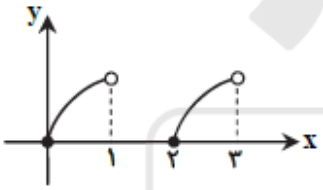
نکته: تابع f در $x=a$ پیوسته است. اگر و تنها اگر f در $x=a$، هم از چپ و هم از راست پیوسته باشد.

راه‌حل اول: کافی است دو نقطه با طول عدد صحیح زوج و فرد را آزمایش کنیم. به‌طور مثال $x=۰$ و $x=۱$، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=f(۰) \Rightarrow \lim_{x\to ۰^+}\left|\sin\frac{\pi}{۲}x\right|=\lim_{x\to ۰^-}(m+nx+[x]) \Rightarrow ۰=m-۱ \Rightarrow m=۱ \quad (*)$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱) \Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}(m+nx+[x])=\lim_{x\to ۱^-}\left|\sin\frac{\pi}{۲}x\right| \Rightarrow m+n+۱=۱ \xrightarrow{(*)} n=-۱$$

راه‌حل دوم: نمودار ضابطهٔ اول به‌صورت روبه‌رو است:



پس به‌عنوان مثال ضابطهٔ دوم در بازهٔ $[۱,۲)$ باید به‌صورت خط $y=-x+۲$ باشد، پس داریم:

$$x\in[۱,۲) \Rightarrow m+nx+[x]=m+nx+۱=-x+۲ \Rightarrow \begin{cases} n=-۱ \\ m=۱ \end{cases}$$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۵)

نکته : $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$

نکته : $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

ابتدا صورت کسر را ساده می‌کنیم:

$$\tan(5x+\frac{\pi}{6})-\tan(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{\sin(5x+\frac{\pi}{6})}{\cos(5x+\frac{\pi}{6})}-\frac{\sin(2x+\frac{\pi}{6})}{\cos(2x+\frac{\pi}{6})}=\frac{\sin(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})-\sin(2x+\frac{\pi}{6})\cos(5x+\frac{\pi}{6})}{\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}$$

$$=\frac{\sin((5x+\frac{\pi}{6})-(2x+\frac{\pi}{6}))}{\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}=\frac{\sin 3x}{\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}$$

بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x\times\frac{1}{3}\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{3}\cos(5x+\frac{\pi}{6})\cos(2x+\frac{\pi}{6})}=\frac{3}{\cos\frac{\pi}{6}\times\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۳)

نکته: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty\end{cases}\qquad\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty\end{cases}$$

$x=0$ ریشهٔ مخرج کسر تمامی توابع است، پس به بررسی حد راست و چپ هر کدام از گزینه‌ها وقتی $x\to 0^+$ یا $x\to 0^-$ می‌پردازیم:

۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{0}{x}=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{x}=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[-x]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{x}=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[-x]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{0}{x}=0$

۳) $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x^2]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{0}{x}=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x^2]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{0}{x}=0$

۴) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[-x^2]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{x}=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[-x^2]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{x}=+\infty$

بنابراین تابع h در گزینهٔ ۳ مجانب قائم ندارد چون حد آن در صفر متناهی است. سایر توابع در صفر حد راست یا چپ نامتناهی دارند.

۱۰ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: به طور کلی حد هر چند جمله‌ای به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است، یعنی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

ابتدا حد تابع را وقتی $x\to+\infty$، محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+4x+5})=\lim_{x\to+\infty}(x+|x|)=\lim_{x\to+\infty}(x+x)=+\infty$$

برای یافتن حد تابع وقتی $x\to-\infty$، ضابطهٔ تابع را در مزدوج آن ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+4x+5})\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4x+5}}{x-\sqrt{x^2+4x+5}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+4x+5)}{x-\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x-5}{x-|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x-5}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{2x}=-2$$

با توجه به اینکه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-2$، نمودار گزینهٔ ۲ می‌تواند مربوط به تابع f باشد.

۱۱ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۳)

نکته: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty\end{cases}$$

نکته:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$$

حد تابع در هر دو طرف $x=a$ برابر $-\infty$ است، پس $x=a$ ریشهٔ مضاعف مخرج است:

$$\cos^2x+\cos x=0\Rightarrow\cos x(1+\cos x)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\ \text{ریشه ساده}\\ \cos x=-1\Rightarrow x=\pi\ \text{ریشه مضاعف}\end{cases}$$

در اطراف $x=\pi$، علامت $1+\cos x$ مثبت است، پس $x=\pi$ ریشهٔ مضاعف مخرج است و داریم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{3x+b}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{3\pi+b}{-1\times0^+}=-\infty\Rightarrow3\pi+b>0\Rightarrow b>-3\pi\Rightarrow b>-9/42\Rightarrow[b]\geq-10$$

حداقل مقدار $[b]$ برابر -10 است.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۱۲ – پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار ❋ حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۳)

نکته: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty\end{cases} \qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty\end{cases}$$

نکته:

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$$

ضابطه تابع f به‌صورت $f(x)=-(x-2)^3$ است. چون $f(2)=0$ و $f(0)=8$، پس $f^{-1}(8)=0$ است و $x=8$ ریشهٔ هر دو مخرج است.

$$f(x)=y=-(x-2)^3 \Rightarrow x-2=-\sqrt[3]{y} \Rightarrow x=2-\sqrt[3]{y} \Rightarrow f^{-1}(x)=2-\sqrt[3]{x}$$

$$y=\frac{1}{f(x-6)}-\frac{1}{f^{-1}(x)}=\frac{-1}{(x-8)^3}-\frac{1}{2-\sqrt[3]{x}}=\frac{-1}{(x-8)^3}-\frac{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{8-x}=\frac{-1+(x-8)^2(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x-8)^3}$$

$$\lim_{x\to 8^\pm} y=\frac{-1}{0^\pm}=\mp\infty$$

سمت راست $x=8$ حد تابع برابر $-\infty$ و سمت چپ $x=8$ حد تابع برابر $+\infty$ است.

۱۳ فرض کنید $f(x)=\dfrac{2x^2-kx|x-1|+|x|}{4x^2+3x+1}$. اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -3

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-kx(-(x-1))-x}{4x^2+3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2+k)x^2}{4x^2}=\frac{2+k}{4}$$

بنابراین:

$$\frac{2+k}{4}=4\Rightarrow k=14$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-kx(x-1)+x}{4x^2+3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-k)x^2}{4x^2}=\frac{2-k}{4}=\frac{2-14}{4}=-3$$

۱۴ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a-۲b)x^۴+(a+۲b)x^۳+ax}{۴x^۳+bx^۲+۱}=۲$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

نکته‌ای بسیار راهگشا در رابطه با حد در بی‌نهایت:
اگر $f(x)$ تابعی گویا باشد و حاصل حد در بی‌نهایت برابر عددی مخالف صفر شود یعنی درجهٔ صورت و مخرج یکسان می‌باشد.

پاسخ تشریحی:

چون حاصل حد برابر ۲ شده است، پس باید درجهٔ صورت کسر با درجهٔ مخرج کسر برابر باشد. بنابراین ضریب جملهٔ $x^۴$ در صورت صفر است.

$$a-۲b=۰\Rightarrow a=۲b$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+۲b)x^۳+ax}{۴x^۳+bx^۲+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+۲b)x^۳}{۴x^۳}=\frac{a+۲b}{۴}=۲\Rightarrow \underbrace{a}_{۲b}+۲b=۸$$

$$\Rightarrow ۲b+۲b=۸\Rightarrow b=۲\Rightarrow a=۴$$

بنابراین: $a+b=۶$.

۱۵ فرض کنید f تابعی خطی با دامنه $\mathbb{R}$ است. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^{-۱}(x)}=۹$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{xf^{-۱}(\frac{۱}{x})}=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $f(۰)$ کدام است؟

۱) -۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۱۸ ۴) -۱۹

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ ترکیبی/محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

فرض کنید $f(x)=ax+b$ باشد، در این صورت معکوس تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$y=ax+b\Rightarrow ax=y-b\Rightarrow x=\frac{۱}{a}y-\frac{b}{a}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\frac{۱}{a}x}=a^۲=۹$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{xf^{-۱}(\frac{۱}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-ax+b}{x(\frac{۱}{a}(\frac{۱}{x})-\frac{b}{a})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-ax+b}{\frac{۱}{a}-\frac{b}{a}x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-ax}{-\frac{b}{a}x}=\frac{a^۲}{b}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\begin{cases}a^۲=۹\\ \frac{a^۲}{b}=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{۹}{b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=۱۸$$

در نتیجه: $f(۰)=b=۱۸$

۱۶ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+1}\left[\frac{4x+1}{x+2}\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

نکته:
در محاسبهٔ حد توابعی که متغیر (x) هم درون و هم بیرون براکت قرار دارد، ابتدا حاصل حد تابع براکتی را محاسبه می‌کنیم و بعد به محاسبهٔ حد می‌پردازیم.

پاسخ تشریحی:

با توجه به این که حاصل حد درون براکت برابر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{x+2}=4$ می‌باشد، حال باید مشخص کنیم که حاصل حد درون براکت کمی بیشتر از ۴ یا کمی کمتر از ۴ است. برای این منظور عبارت درون براکت را با ۴ مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{4x+1}{x+2}\square 4\Rightarrow\frac{4x+1}{x+2}\square\frac{4(x+2)}{x+2}\Rightarrow\underbrace{\frac{4x+1}{x+2}}_{\text{عبارت داخل براکت}}\boxed{<}\frac{4x+8}{x+2}=4$$

پس عبارت درون براکت از ۴ کمتر است، بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4x+1}{x+2}\right]=\left[4^-\right]=3$$

۱۷ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^{x+k}+1}{3^{x+k}+3^x-1}=-\frac{1}{3}$ باشد، مقدار k کدام است؟

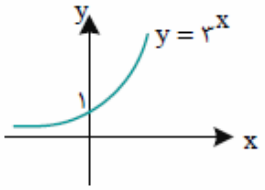
۱) $\log_3^2$ ۲) $\log_2^3$ ۳) $-\log_3^2$ ۴) $-\log_2^3$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار $y=3^x$ می‌توان گفت: $\lim\limits_{x\to+\infty}3^x=+\infty$ ، پس با تغییر متغیر، اگر فرض کنیم $t=3^x$ و $x\to+\infty$، آن‌گاه $t\to+\infty$ و حد موردنظر به صورت زیر در می‌آید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^x\times3^k+1}{3^x\times3^k+3^x-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t(1-3^k)+1}{t(3^k+1)-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(1-3^k)t}{(1+3^k)t}=\frac{1-3^k}{1+3^k}$$



بنابراین:

$$\frac{1-3^k}{1+3^k}=-\frac{1}{3}\Rightarrow3-3\times3^k=-1-3^k\Rightarrow3+1=3\times3^k-3^k\Rightarrow4=3^k(3-1)$$

$$\Rightarrow4=2\times3^k\Rightarrow3^k=2\Rightarrow k=\log_3^2$$

۱۸ اگر $f(x)=\frac{x^۲+x|x|+x+۴}{-x+۲}$ باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر، مجانب‌های افقی نمودار تابع $y=fof(x)$ را نشان می‌دهد؟

۱) $y=۱$ و $y=-۱$ ۲) $y=۱$ و $y=۰$ ۳) $y=-۱$ و $y=۰$ ۴) $y=-۱$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۳+x^۲+x+۴}{-x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳}{-x}=\lim_{x\to+\infty}(-۲x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۳-x^۲+x+۴}{-x+۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-۱$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)=\lim_{t\to-\infty} f(t)=-۱\Rightarrow y=-۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to-\infty} f\big(f(x)\big)=\lim_{t\to-۱} f(t)=\frac{۱-۱-۱+۴}{-(-۱)+۲}=۱\Rightarrow y=۱$$

پس $y=۱$ و $y=-۱$ مجانب‌های افقی نمودار تابع $y=fof(x)$ هستند.

۱۹ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-x+۱}{x^۲+x-۱}$ در اطراف مجانب افقی آن چگونه است؟

۱) ..... ۲) ..... ۳) ..... ۴) .....

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

آی مای‌ها، می‌خوایم شما رو با «نحوهٔ رفتار تابع در مجاورت مجانب افقی» آشنا کنیم!

برای بررسی رفتار تابع $f(x)$ در مجاورت مجانب افقی آن، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

الف: ابتدا مجانب افقی آن را به دست می‌آوریم. (L)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

ب: سپس $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-L\big)$ را حساب می‌کنیم، اگر مثبت باشد تابع در مجاورت مجانب افقی خود در $x\to+\infty$، بالای مجانب افقی (L) خواهد بود و اگر حد موردنظر، منفی باشد، تابع در مجاورت مجانب افقی خود در $x\to+\infty$، پایین مجانب افقی (L) خواهد بود.

برای مجانب افقی در $x\to-\infty$ نیز به طریق مشابه عمل می‌شود.

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲}{x^۲}=۱$$

بنابراین، خط $y=۱$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ و $-\infty$ است. از طرف دیگر:

$$f(x)-۱=\frac{x^۲-x+۱}{x^۲+x-۱}-۱=\frac{-۲x+۲}{x^۲+x-۱}\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-۱=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۲x+۲}{x^۲+x-۱}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۲x}{x^۲}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۲}{x}=۰^-\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-۱=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۲x+۲}{x^۲+x-۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۲x}{x^۲}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۲}{x}=۰^+\end{cases}$$

پس اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)-۱<۰$ و در نتیجه $f(x)<۱$ و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)-۱>۰$ و در نتیجه $f(x)>۱$.

یعنی نمودار تابع f در $+\infty$ پایین مجانب افقی و در $-\infty$ بالای مجانب افقی خود است و به صورت شکل مقابل می‌باشد. $y=۱$ .....

۲۰ اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x^۲+mx-۱}{x^۲-x+۲}$ در اطراف مجانب افقی آن به صورت ..... باشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $\{۲\}$ ۲) $\{-۲\}$ ۳) $[-۲,۲]$ ۴) $(۰,۲)$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

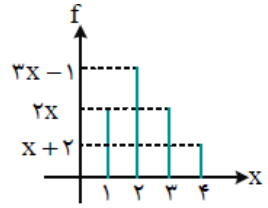
پاسخ تشریحی:

توجه کنید که: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

پس خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ و $-\infty$ است. از طرف دیگر: $f(x)-2 = \frac{2x^2+mx-1}{x^2-x+2} - 2 = \frac{(m+2)x-5}{x^2-x+2}$

با توجه به نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی آن که به صورت ..... است، پس در $+\infty$ و در $-\infty$ باید $f(x)-2<0$ باشد. چون مخرج $f(x)-2$ عبارت x^2-x+2 است و در $+\infty$ و $-\infty$ عبارتی مثبت است، پس صورت کسر $f(x)-2$ باید در $+\infty$ و $-\infty$ مقداری منفی باشد. اگر صورت این کسر از درجهٔ اول باشد نمی‌تواند چنین باشد، زیرا عبارت‌های درجهٔ اول در جدول تعیین علامت در اطراف ریشه تغییر علامت می‌دهند و در یک شاخه ($+\infty$ یا $-\infty$) دارای علامت مثبت و در شاخهٔ دیگر دارای علامت منفی هستند، بنابراین صورت کسر نمی‌تواند همواره منفی باشد. پس صورت این کسر نباید از درجهٔ اول باشد، بنابراین $m+2=0$ و در نتیجه $m=-2$ می‌باشد.

۲۱ در نمودار مقابل، میانگین داده‌ها برابر ۲/۴ است. فراوانی نسبی دادهٔ ۳ کدام است؟



۱) ۰/۱۶
۲) ۰/۲۴
۳) ۰/۲۸
۴) ۰/۲

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

پاسخ تشریحی:

برای محاسبهٔ میانگین داده‌ها، از رابطهٔ مقابل، استفاده می‌کنیم:

$$\text{میانگین } \bar{x} = \frac{f_1\times x_1 + f_2\times x_2 + \ldots + f_n\times x_n}{f_1+f_2+\ldots+f_n}$$

$$\text{میانگین} = \frac{(2x)\times 1 + (3x-1)\times 2 + (2x)\times 3 + (x+2)\times 4}{(2x)+(3x-1)+(2x)+(x+2)} = 2/4 \Rightarrow 96x+12 = 90x+30 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{فراوانی نسبی دادهٔ مورد نظر (۳)} = \frac{f_3}{n} = \frac{2x}{(2x)+(3x-1)+(2x)+(x+2)} = \frac{6}{25} = 0/24$$

۲۲ اگر میانگین داده‌های $1^2+7a_1, 2^2+7a_2, \ldots, 10^2+7a_{10}$ برابر ۱۱۱/۶۵ و میانگین داده‌های $a_1, a_2, \ldots, a_9$ برابر ۱۱/۵ باشد، آن‌گاه a_{10} کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

مجموع مربع اعداد: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

مجموع مکعب اعداد: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

پاسخ تشریحی:

ابتدا به کمک میانگین، مجموع ۹ دادهٔ $a_1, a_2, \ldots, a_9$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{a} = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_9}{9} = 11/5 \Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_9 = 103/5$$

با میانگین داده‌های $7a_i+i^2$، دادهٔ a_{10} را پیدا می‌کنیم. ببینید:

$$\frac{(7a_1+1^2)+(7a_2+2^2)+\ldots+(7a_{10}+10^2)}{10} = 111/65 \Rightarrow 7(\underbrace{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_9}_{103/5}+a_{10}) + (\underbrace{1^2+2^2+\ldots+10^2}_{385}) = 1116/5$$

$$\Rightarrow 724/5 + 7a_{10} + 385 = 1116/5 \Rightarrow 7a_{10} = 1116/5 - 724/5 - 385 \Rightarrow 7a_{10} = 7 \Rightarrow a_{10} = 1$$

۲۳ اگر میانگین و واریانس داده‌های طبیعی و متمایز $7,15,9,a,b$ به ترتیب برابر ۱۳و۲ / ۲۱ باشد، آن‌گاه برای $\{a,b\}$ چند جواب یافت خواهد شد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

واریانس داده‌ها:

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n} \text{ یا } \sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2$$

انحراف معیار داده‌ها:

اگر از واریانس جذر بگیریم، انحراف معیار به‌دست می‌آید.

σ (انحراف معیار) $=\sqrt{\text{واریانس}}$

پاسخ تشریحی:

چون میانگین داده‌ها، برابر ۱۳ است، پس مجموع آن‌ها ۶۵ است. بنابراین:

$$\bar{x}=\frac{7+15+9+a+b}{5}=13\Rightarrow 31+a+b=65\Rightarrow a+b=34$$

با کمک واریانس، a^2+b^2 را محاسبه می‌کنیم. پس:

$$\sigma^2=\frac{7^2+15^2+9^2+a^2+b^2}{5}-13^2\Rightarrow 21/2+169=\frac{49+225+81+a^2+b^2}{5}\Rightarrow 5\times 190/2=355+a^2+b^2\Rightarrow a^2+b^2=596$$

$$a^2+b^2=596\xrightarrow{b=34-a}a^2+(34-a)^2=596\Rightarrow 2a^2-68a+560=0\xrightarrow{\div 2}a^2-34a+280=0$$

$$\Rightarrow (a-20)(a-14)=0\Rightarrow \begin{cases}a=20\Rightarrow b=14\\ a=14\Rightarrow b=20\end{cases}\Rightarrow \{a,b\}=\{14,20\}$$

بنابراین برای $\{a,b\}$ یک جواب یافت خواهد شد.

۲۴ داده‌های زیر را در نمودار جعبه‌ای نمایش داده‌ایم. اگر میانگین داده‌های سمت چپ جعبه را a بنامیم، آن‌گاه مقدار تقریبی a کدام است؟

$$1,\underbrace{2,2}_{\text{۲تا}},\underbrace{3,3,3}_{\text{۳تا}},\underbrace{4,4,4,4}_{\text{۴تا}},\ldots,\underbrace{12,12,\ldots,12}_{\text{۱۲تا}}$$

۱) ۶ / ۵ ۲) ۵ / ۱۲ ۳) ۴ / ۹۱ ۴) ۴ / ۱۶

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

پاسخ تشریحی:

تعداد کل داده‌ها $1+2+3+\ldots+12$ یعنی ۷۸ تا می‌باشد. پس میانگین سی و نهمین و چهلمین عدد، همان میانه است. در نتیجه ۳۹ تا عدد، قبل از میانه قرار دارد. همچنین عدد وسط نیمهٔ اول داده‌ها یعنی بیستمین عدد، همان چارک اول است. پس ۱۹ عدد، سمت چپ جعبه قرار دارد. داده‌های سمت چپ جعبه را ببینید:

$$1,\underbrace{2,2}_{\text{۲تا}},\underbrace{3,3,3}_{\text{۳تا}},\underbrace{4,4,4,4}_{\text{۴تا}},\underbrace{5,5,5,5,5}_{\text{۵تا}},\underbrace{6,6,6,6}_{\text{عدد}}$$

$$\text{میانگین ۱۹ داده}=\frac{1+2\times 2+3\times 3+4\times 4+5\times 5+4\times 6}{19}=\frac{1+4+9+16+25+24}{19}=\frac{79}{19}\simeq 4/16$$

۲۵ میانگین و واریانس ۴۰ دادهٔ آماری، به ترتیب، برابر ۱۲ و ۹ است. اگر به هر یک از داده‌ها ۶ واحد اضافه کنیم، آن‌گاه معکوس ضریب تغییرات داده‌های جدید، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱/۳ ۳) ۲ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۳)

آمارشناسی:

داده‌های اولیه	$x_1, x_2, \ldots, x_n$		داده‌های جدید	$ax_1+b, ax_2+b, \ldots, ax_n+b$
میانگین	$\bar{x}$		میانگین	$a\bar{x}+b$
واریانس	σ^2	داده‌ها در a ضرب و با b جمع می‌شوند.	واریانس	$a^2\sigma^2$
انحراف معیار	σ		انحراف معیار	$\lvert a\rvert\sigma$
ضریب تغییرات	$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$		ضریب تغییرات	$CV'=\frac{\lvert a\rvert\sigma}{a\bar{x}+b}$

پاسخ تشریحی:

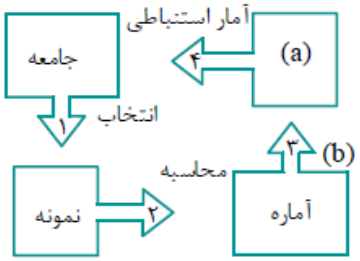
با اضافه شدن ۶ واحد به هر یک از داده‌ها، واریانس و انحراف معیار، تغییر نخواهد کرد ولی به میانگین، ۶ واحد اضافه می‌شود.

$\bar{x}$ داده‌های جدید $= ۱۲+۶=۱۸$

σ داده‌های جدید $= \sqrt{۹}=۳$ σ داده‌های اولیه

CV داده‌های جدید $= \frac{\sigma \text{ داده‌های جدید}}{\bar{x} \text{ داده‌های جدید}} = \frac{۳}{۱۸}=\frac{۱}{۶} \Rightarrow$ جواب $= \frac{۱}{CV}=۶$

۲۶ با توجه به شکل مقابل، مکان‌های a و b جانشین کدام‌یک از موارد زیر هستند؟



۱) برآورد = a ، گردآوری = b

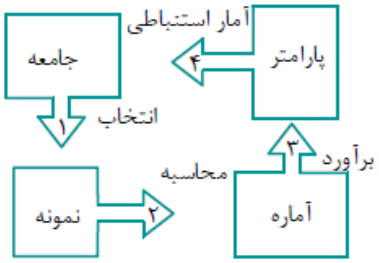
۲) برآورد = a ، تخمین = b

۳) پارامتر = a ، برآورد = b

۴) میانگین = a ، برآورد = b

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۴)

پاسخ تشریحی:



شکل داده شده مربوط به صفحه ۱۱۹ کتاب درسی است. که با توجه به شکل مقابل می‌توان گفت که در آمار استنباطی، پارامتر یک جامعه، از روی انتخاب نمونه و محاسبه آماره‌اش، برآورد می‌شود.

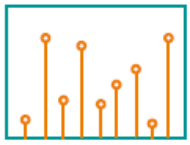
۲۷ در نمونه‌گیری خوشه‌ای معمولاً تفاوت از خوشه‌ای به خوشهٔ دیگر ..... و در نمونه‌گیری طبقه‌ای معمولاً تفاوت در اعضای درون هر طبقه ..... است.

۱) کم - کم ۲) کم - زیاد ۳) زیاد - کم ۴) زیاد – زیاد

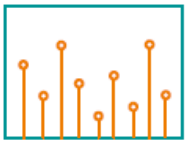
پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۴)

پاسخ تشریحی:

در نمونه‌گیری خوشه‌ای معمولاً تفاوت در درون خوشه‌ها نوسان دارد ولی از خوشه‌ای به خوشه دیگر تفاوت چندانی پیش‌بینی نمی‌شود، ببینید:

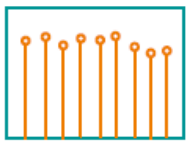


خوشه دوم



خوشه اول

در نمونه‌گیری طبقه‌ای معمولاً تفاوت در درون طبقه‌ها نوسان کمتری داشته ولی از طبقه‌ای به طبقه دیگر، تفاوت زیادی دیده می‌شود:



طبقه دوم

طبقه اول

۲۸ می‌خواهیم از بین ۲۱۴۲ نفر با شماره‌های ۱ تا ۲۱۴۲، تعداد ۵۱ عضو را به عنوان نمونه به شیوه سامانمند انتخاب کنیم. کدام جفت از اعداد داده شده می‌توانند با هم در نمونه منتخب حضور داشته باشند؟

۱) ۲۰۲۴ و ۱۴۰۲ ۲) ۲۰۲۴ و ۱۴۰۳ ۳) ۶۰۵ و ۱۴۰۲ ۴) ۶۰۵ و ۱۴۰۳

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۴)

پاسخ تشریحی:

$$\text{تعداد گروه‌ها} = \frac{۲۱۴۲}{۵۱} = ۴۲$$

بنابراین دو عددِ a و b هر دو در نمونهٔ منتخب حضور دارند اگر و فقط اگر در تقسیم بر ۴۲، باقی‌مانده یکسانی داشته باشند.

با بررسی گزینه‌ها می‌توان دریافت که اعداد ۱۴۰۳ و ۶۰۵ هر دو در تقسیم بر ۴۲، باقی‌ماندهٔ ۱۷ دارند.

۲۹ اگر بازه اطمینان بیش از ۹۵ ٪ برای میانگین جامعه‌ای به صورت $(۲/۹۳, ۳/۸۱)$ و انحراف معیار جامعه برابر ۲/۲ باشد، اندازه نمونه کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۲۵۰

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۴)

نکته:

بازه برآورد میانگین با اطمینان بیش از ۹۵% به فرم زیر است:

$$\left[\overline{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

که n حجم نمونه و σ انحراف معیار جامعه و $\overline{x}$ میانگین نمونه می‌باشد.

نتیجه) طول بازه برآورد میانگین برابر است با : $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که طول بازه برآورد میانگین برابر $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ است حال با توجه به اینکه $\sigma = ۲/۲$ است، داریم:

$$\begin{cases} \text{طول بازه}: b-a = ۳/۸۱-۲/۹۳ = ۰/۸۸ \\ \sigma = ۲/۲ \end{cases}$$

$$b-a = \frac{۴\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow ۰/۸۸ = \frac{۴\times ۲/۲}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{۸/۸}{۰/۸۸} = ۱۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} n = ۱۰۰$$

بنابراین اندازه نمونه برابر ۱۰۰ است.

۳۰ در جامعه‌ای با واریانس ۷/۸۴، حداقل اندازهٔ نمونه‌ها چقدر باشد تا یقین حاصل کنیم که انحراف معیار برآورد میانگین‌ها کمتر یا مساوی ۰/۵۶ باشد؟

۱) ۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۴)

انحراف معیار میانگین:

انحراف معیار میانگین برابر است با: $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

پاسخ تشریحی:

واریانس جامعه برابر ۷/۸۴ است، پس:

$$\sigma^۲ = ۷/۸۴ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۷/۸۴} = ۲/۸$$

از طرفی می‌دانیم که انحراف معیار برآورد میانگین‌ها نیز باید کمتر یا مساویِ ۰/۵۶ باشد:

$$\sigma_{\overline{x}} \le ۰/۵۶ \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le ۰/۵۶ \Rightarrow \frac{۲/۸}{\sqrt{n}} \le ۰/۵۶ \Rightarrow \sqrt{n} \ge \frac{۲/۸}{۰/۵۶}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \ge ۵ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} n \ge ۲۵ \Rightarrow n_{min} = ۲۵$$

۳۱ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ صفحه‌های ۸۴ و ۸۵ فیزیک ۱

با توجه به رابطهٔ بین دما برحسب فارنهایت و کلوین و جای‌گذاری آن‌ها برحسب درجهٔ سلسیوس خواهیم داشت:

$$T_K = ۴F$$

$$\theta + ۲۷۳ = ۴(\frac{۹}{۵}\theta + ۳۲) \Rightarrow \theta + ۲۷۳ = ۷/۲\theta + ۱۲۸ \Rightarrow ۶/۲\theta = ۱۴۵ \Rightarrow \theta = \frac{۱۴۵۰}{۶۲} = \frac{۷۲۵}{۳۱}°C$$

۳۲ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ صفحهٔ ۹۴ فیزیک ۱

با توجه به رابطهٔ چگالی برحسب تغییر دما می‌توان نوشت:

$$\rho_۲ = \frac{\rho_۱}{۱+\beta\Delta\theta} = \rho_۱(۱-\beta\Delta\theta) \Rightarrow \rho_۱ + \frac{۵}{۱۰۰۰}\rho_۱ = \rho_۱ - \rho_۱\beta\times(-۲۵)$$

$$۲۵\beta = ۵\times۱۰^{-۳} \Rightarrow \beta = \frac{۱}{۵۰۰۰} = ۲\times۱۰^{-۴}\frac{۱}{K}$$

۳۳ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده ❋ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۷ فیزیک ۱

نادرستی عبارت ج: گسیل هر نوع موج الکترومغناطیس از اجسام که در هر دمایی رخ می‌دهد تابش گرمایی نامیده می‌شود.

۳۴ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: سخت ❋ صفحهٔ ۹۵ فیزیک ۱

محاسبهٔ تغییر دما برحسب درجهٔ سلسیوس:

$$F = \frac{۹}{۵}\theta + ۳۲ \Rightarrow \Delta F = (\frac{۹}{۵}\theta_۲ + ۳۲) - (\frac{۹}{۵}\theta_۱ + ۳۲) \Rightarrow \Delta F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta$$

$$۵/۴ = \frac{۹}{۵}\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۳°C$$

محاسبهٔ دمای اولیه برحسب درجهٔ سلسیوس:

$$F_۱ = ۳۲°F \Rightarrow ۳۲ = \frac{۹}{۵}\theta_۱ + ۳۲ \Rightarrow \theta_۱ = ۰$$

بنابراین دمای آب از صفر به $۳°C$ رسیده است. به‌دلیل انبساط غیرعادی آب در محدودهٔ صفر تا ۴ درجهٔ سلسیوس، با کاهش حجم آب درون ظرف مواجه هستیم.

طبق رابطهٔ $P = \rho gh$ برای فشار مایع به نظر می‌رسد که با کاهش ارتفاع آب فشار کاهش یابد. در حالی که افزایش چگالی نیز باید بررسی شود.

بهتر است از رابطهٔ $P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A}$ و با فرض ثابت ماندن mg و A، بررسی کنیم. بنابراین فشار وارد بر کف ظرف از طرف مایع ثابت می‌ماند.

یعنی عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.

۳۵ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ صفحهٔ ۴۳ فیزیک ۱

با استفاده از رابطهٔ محاسبهٔ گرما و تغییر حجم برحسب تغییر دما می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} Q = mc\Delta\theta \\ \Delta V = V_۱ ۳\alpha\Delta\theta \end{cases} \xrightarrow{\Delta\theta=\frac{Q}{mc} \text{ و } \Delta\theta=\frac{\Delta V}{V_۱ ۳\alpha}} \frac{Q}{(\frac{۲۰۰}{۱۰})(۲۰۰۰)} = \frac{\Delta V}{V_۱}\times\frac{۱}{(۳\times۱۰^{-۵})}$$

$$\text{درصد تغییر حجم} = \frac{\Delta V}{V_۱}\times۱۰۰ = ۰/۶ \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_۱} = ۶\times۱۰^{-۳}$$

در این صورت گرمای داده‌شده برابر است با:

$$Q = (۶\times۱۰^{-۳})(۴\times۱۰^{۲})(\frac{۱}{۳\times۱۰^{-۵}}) \Rightarrow Q = ۸\times۱۰^{۴}J = ۸۰kJ$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۳۶ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ صفحهٔ ۴۴ فیزیک ۱

طبق رابطهٔ $P=\frac{Q}{\Delta t}$ و با توجه به ثابت بودن توان دستگاه خواهیم داشت:

$Q_{ABC}=P\Delta t=mc\Delta\theta$: گرمایی که جامد را به نقطهٔ ذوب می‌رساند

$Q_{CD}=P(1/2t)=mL_F$: گرمایی که جامد را در نقطهٔ ذوب به مایع تبدیل می‌کند

$$\begin{cases}Q_{ABC}=mc(300)=P\cdot t\\ Q_{CD}=mL_f=P\cdot(1/2t)\end{cases}\Rightarrow Q_{CD}=1/2Q_{ABC}\Rightarrow mL_F=mc(300)(1/2)\Rightarrow L_F=360C$$

۳۷ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: سخت ❋ صفحهٔ ۹۳ فیزیک ۱

ابتدا تغییر حجم مایع و ظرف را حساب می‌کنیم:

$$\Delta V_{\text{جیوه}}=V_1\beta\Delta\theta\Rightarrow\Delta V=(2000)(10^{-3})(-200)=400cm^3$$

$$\Delta V_{\text{ظرف}}=V_1 3\alpha\Delta\theta\Rightarrow\Delta V=(2000)(3\times10^{-5})(-200)=6cm^3$$

بنابراین $1600cm^3$ جیوه درون ظرف مسی با حجم $1994cm^3$ قرار دارد. به عبارتی $394cm^3$ از ظرف خالی است. در این صورت کسری از ظرف که خالی می‌ماند برابر است با:

$$\frac{394}{1994}=\frac{197}{997}\simeq0/197\simeq0/2\simeq20\%$$

۳۸ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ صفحهٔ ۹۲ فیزیک ۱

ابتدا تغییر دمای صفحه برحسب درجهٔ سلسیوس را حساب می‌کنیم:

$$F=\frac{9}{5}\theta+32\Rightarrow\Delta F=\frac{9}{5}\Delta\theta\Rightarrow360=\frac{9}{5}\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=200^\circ C$$

با استفاده از رابطهٔ محاسبهٔ تغییرات سطح، ضریب انبساط خطی و در نهایت ضریب انبساط سطحی را حساب می‌کنیم:

$$\Delta A=A_1(2\alpha)\Delta\theta\Rightarrow200=(20\times10^4)(2\alpha)(200)\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2\times10^5}=5\times10^{-6}\frac{1}{K}\Rightarrow2\alpha=2\times5\times10^{-6}\frac{1}{K}$$

۳۹ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده ❋ صفحهٔ ۹۸ فیزیک ۱

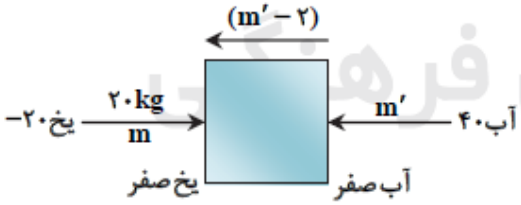
با استفاده از رابطهٔ محاسبهٔ گرمای داده‌شده به دو کره و یکسان بودن این دو مقدار می‌توان نوشت:

$$Q_A=Q_B\xrightarrow[Q=mc\Delta\theta]{\Delta\theta_A=2\Delta\theta_B}(mc\Delta\theta)_A=(mc\Delta\theta)_B\Rightarrow2(mc)_A=(mc)_B$$

یعنی ظرفیت گرمایی جسم B دو برابر ظرفیت گرمایی جسم A است.

۴۰ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۰۶ فیزیک ۱

با استفاده از گرمای مبادله‌شده و توجه به اینکه دمای مخلوط آب و یخ همواره برابر صفر درجهٔ سلسیوس است، می‌توان نوشت:



$$mc\Delta\theta + (m'-2)(-L_F) + m'c\Delta\theta' = 0$$

$$20\left(\frac{c}{2}\right)(20) + (m'-2)(-80c) + m'c(-40) = 0$$

$$2000 - 80m' + 160 - 40m' = 0 \Rightarrow 360 = 120m' \Rightarrow m' = 3\,kg$$

۴۱ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۰۸ فیزیک ۱

گرمایی که بدن از دست می‌دهد، صرف تبخیر آب می‌شود.

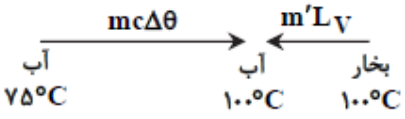
$$|Q_{بدن}| = Q_{تبخیر}$$

$$mc\Delta\theta = m'L_V \Rightarrow (80)(3600)(1) = m'(2/4\times10^6)$$

$$m' = \frac{8\times36\times10^3}{2/4\times10^6} = 120\times10^{-3}\,kg = 120\,g$$

۴۲ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۰۸ فیزیک ۱

با استفاده از تبادل گرمایی انجام‌شده می‌توان نوشت:



$$mc\Delta\theta + m'L_V = 0$$

$$1000c\times25 + m'(-500c) = 0 \Rightarrow m' = 50\,g$$

بنابراین ۵۰ گرم از بخارِ آب ۱۰۰°C به آب ۱۰۰°C تبدیل می‌شود و به جرم آب افزوده می‌شود.

۴۳ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۲۲ فیزیک ۱

فشار اولیهٔ گاز ($P_1 = P_0 + \frac{mg}{A} = 10^5 + \frac{20\times10}{100\times10^{-4}} = 1/2\times10^5\,Pa$) و فشار ثانویهٔ گاز مجهول است. با استفاده از قانون گازهای آرمانی می‌توان فشار نهایی گاز را حساب کرد:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \xrightarrow[\substack{V_1=A(20)\\V_2=A(16)}]{\substack{T_1=273+27\\T_2=273+127}} \frac{(1/2\times10^5)(20A)}{300} = \frac{(P_2)(16A)}{400} \Rightarrow P_2 = \frac{4\times1/2\times10^5\times20}{1/6\times3} = 2\times10^5\,Pa$$

با استفاده از رابطهٔ محاسبهٔ فشار، جرم اضافه‌شده برابر است با:

$$P = \frac{Mg}{A} = \frac{(m+m')g}{A} = 2\times10^5 \Rightarrow \frac{(20+m')(10)}{100\times10^{-4}} = 2\times10^5 \Rightarrow (20+m') = 200 \Rightarrow m' = 180\,kg$$

۴۴ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحهٔ ۱۲۳ فیزیک ۱

ابتدا ارتفاع جیوهٔ معادل ایجادکنندهٔ فشار مایع داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{3}\rho_{Hg}$$

$$\cancel{\rho_{مایع}}g\times15 = \rho_{Hg}\times g\times h_{Hg} \Rightarrow h_{Hg} = 5\,cm$$

اکنون فشار اولیهٔ گاز داخلِ لوله را حساب می‌کنیم:

$$P_0 = P_1 + 5 \Rightarrow 75 = P_1 + 5 \Rightarrow P_1 = 70\,cmHg$$

در حالت نهایی، فشار گازِ داخل لوله با فشار هوای محیط برابر می‌شود. در این صورت با استفاده از قانون گازهای آرمانی داریم:

گاز $V_2 = Ah$ و $V_1 = 20A$ و $P_2 = P_0 = 75\,cmHg$

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow 70\times20A = 75\times Ah \Rightarrow h = \frac{14\times20}{15} = \frac{56}{3}\,cm$$

در این صورت تغییرات ارتفاع لوله برابر است با:

$$\Delta h = 35 - \frac{56}{3} = \frac{105}{3} - \frac{56}{3} = \frac{49}{3}\,cm$$

۴۵ **کدام گزینه نادرست است؟**

۱) دماسنج تابشی بر اساس آشکارسازی شدت تابش گرمایی کار می‌کند.

۲) گرمای ویژه یک جسم به جنس ماده تشکیل‌دهنده آن و دما بستگی دارد.

۳) هر مشخصه قابل اندازه‌گیری که با گرمی و سردی جسم تغییر می‌کند را کمیت دماسنجی می‌گویند.

۴) دماسنج گازی، دماسنج مقاومت پلاتینی و ترموکوپل دماسنج‌های معیار می‌باشند.

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ خط به خط کتاب درسی ـ ۱۰۰۴)

دما و دماسنجی

دما: کمیتی است که میزان سردی و گرمی اجسام را مشخص می‌کند.

برای اندازه‌گیری دما لازم است مقیاس دمایی داشته باشیم.

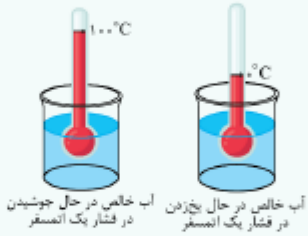
کمیت دماسنجی: هر مشخصه قابل اندازه‌گیری که با گرمی و سردی جسم تغییر می‌کند را کمیت دماسنجی می‌گویند.

تغییر کمیت دماسنجی اساس کار دماسنج‌هاست.

- ساده‌ترین و رایج‌ترین نوع دماسنج، دماسنج‌های جیوه‌ای و الکلی است که در این دماسنج‌ها کمیت دماسنجی ارتفاع مایع درون لوله دماسنج است (نه حجم مایع) زیرا به جز چند مورد استثنا تمام مواد با افزایش دما منبسط و با کاهش آن منقبض می‌شوند.
- دقت دماسنج پزشکی (یک دهم درجه سلسیوس) بیشتر از دماسنج جیوه‌ای معمولی (یک درجه سلسیوس) است.
- دماسنج جیوه‌ای و الکلی فقط دماهایی را اندازه می‌گیرند که در آن محدوده جیوه و الکل مایع هستند.

مقیاس‌های دما

یکی از مقیاس‌های متداول دما مقیاس دما بر حسب درجه سلسیوس است؛ این مقیاس مبتنی بر دو نقطه ثابت است یکی دمایی که در آن آب خالص در فشار جو متعارف یک اتمسفر شروع به یخ زدن می‌کند و دیگری دمایی که آب خالص در فشار جو متعارف در حال جوشیدن است. به نقطه اول عدد صفر و به نقطه دوم عدد ۱۰۰ را اختصاص می‌دهند و فاصله بین این دو را به صد قسمت مساوی تقسیم می‌کنند و هر قسمت را یک درجه می‌نامند. قبلاً به چنین دماسنجی دماسنج با مقیاس سانتی‌گراد گفته می‌شد.



- فارنهایت یکی دیگر از یکاهای دما است که در صنعت و هواشناسی کاربرد دارد.

رابطهٔ خطی بین دماسنج‌ها

$$\frac{\theta-0}{100-0}=\frac{T-273}{373-273}=\frac{F-32}{212-32}=\frac{x-a}{b-a}$$

نتایج نهایی از رابطه خطی بین دماسنج‌ها

$$T=\theta+273\Rightarrow\Delta T=\Delta\theta \qquad F=1/8\theta+32\Rightarrow\Delta F=1/8\Delta\theta$$

- کمترین دمای ممکن صفر کلوین است که برابر ۲۷۳/۱۵- درجه سلسیوس است، اما برای دما حد بالایی وجود ندارد.
- همواره عدد دمای یک جسم بر حسب کلوین بیشتر از عدد دمای آن جسم بر حسب سلسیوس است.
- دما در مقیاس کلوین همواره نامنفی است.
- در دمای ۴۰- درجه سلسیوس مقیاس فارنهایت نیز ۴۰- را نشان می‌دهد.
- تغییر دما در مقیاس‌های سلسیوس و کلوین با هم برابر است.

دماسنج‌های معیار:

۱) دماسنج گازی: اساس کار مبتنی بر قانون گازهای کامل

۲) دماسنج مقاومت پلاتینی: اساس کار تغییر مقاومت الکتریکی در اثر تغییر دما

۳) تف‌سنج (پیرومتر): اساس کار تابش گرمایی

دماسنج تابشی بر اساس آشکارسازی شدت تابش گرمایی کار می‌کند.

دماسنج ترموکوپل

به دلیل دقت کمتر آن نسبت به دماسنج‌های معیار از مجموعه دماسنج‌های معیار کنار گذاشته شد.

این دماسنج کاربرد فراوانی در صنعت و آزمایشگاه دارد.

کمیت دماسنجی این دماسنج ولتاژ است.

دو سیم رسانای غیر هم‌جنس مانند مس و کنستانتان از طرفی در دمای ذوب یخ نگه داشته شده و از طرف دیگر در مکانی به هم متصل‌اند که می‌خواهیم دمای آن را به دست آوریم. این مجموعه با سیم‌های مسی رابطه به یک ولت‌سنج بسته می‌شود. با تغییر دمای محل مورد اندازه‌گیری عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد تغییر می‌کند. گستره دماسنجی یک ترموکوپل به جنس سیم‌های آن بستگی دارد.

مزایای ترموکوپل

۱) سرعت عمل بالای دماسنج: به دلیل جرم کوچک محل اتصال، خیلی سریع با دستگاهی که دمای آن اندازه‌گیری می‌شود به حالت تعادل گرمایی می‌رسد یعنی دمای جسم مورد نظر را سریع‌تر از دماسنج معمولی نشان می‌دهد.

۲) حساس بودن به اختلاف دماهای بسیار کوچک: دقت بالایی دارد ولی دقت آن از دماسنج‌های معیار کمتر است.

۳) گستردگی اندازه‌گیری دما

۴) اندازه‌گیری دماهای بالا

۵) قابلیت استفاده در مدارهای الکترونیکی

پاسخ تشریحی:

دماسنج گازی، دماسنج مقاومت پلاتینی و تف‌سنج، دماسنج‌های معیار می‌باشند ولی دماسنج ترموکوپل به دلیل دقت کمتر آن نسبت به بقیه دماسنج‌ها از مجموعه دماسنج‌های معیار کنار گذاشته شد.

۴۶ دو کره مسی توپر A و B در اختیار داریم که شعاع کره B دو برابر شعاع کره A است. اگر به دو کره گرمای یکسانی بدهیم، تغییر حجم کره A چند برابر تغییر حجم کره B است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

پاسخ تشریحی:

چون جنس هر دو کره یکسان است پس ρ، c و β برای هر دو کره برابر است.

$$r_B = ۲r_A \xrightarrow{V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳} V_B = ۸V_A \quad m = \rho V \xrightarrow{\rho \text{یکسان}} m_B = ۸m_A$$

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow \Delta\theta = \frac{Q}{mc}$$

$$\Delta V = V_۱\beta\Delta\theta \xrightarrow{\Delta\theta=\frac{Q}{mc}} \Delta V = V_۱\beta\frac{Q}{mc}$$

$$\xrightarrow{Q\text{،}c\text{،}\beta \text{یکسان}} \frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_{۱_A}}{V_{۱_B}} \times \frac{m_B}{m_A} \rightarrow \frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_A}{۸V_A} \times \frac{۸m_A}{m_A} = ۱$$

نکته:

برای مقایسهٔ تغییر حجم دوکره، می توانستیم به طور مستقیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم.

$$\begin{cases} \Delta\theta = \frac{Q}{mc} \\ \Delta V = V_۱\beta\Delta\theta \end{cases} \Rightarrow \Delta V = \frac{V_۱\beta Q}{mc} \xrightarrow{\rho=\frac{m}{V_۱}} \Delta V = \frac{\beta Q}{\rho c}$$

در این سؤال هر چهار پارامتر β،Q،ρوc یکسان هستند؛ پس بدون محاسبه، تغییر حجم دو کره برابر است.

۴۷ اگر از ۵۰۰g آب با دمای ۸°C مقدار ۱۰/۵ کیلوژول گرما بگیریم، چگالی آب چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ابتدا افزایش سپس کاهش می‌یابد. ۲) پیوسته افزایش می‌یابد.
۳) ابتدا کاهش سپس افزایش می‌یابد. ۴) پیوسته کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

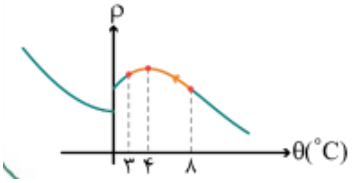
پاسخ تشریحی:

ابتدا دمای نهایی آب را محاسبه می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow -۱۰۵۰۰ = ۰/۵ \times ۴۲۰۰ \times (\theta_۲ - ۸)$$

$$\rightarrow -۵ = \theta_۲ - ۸ \rightarrow \theta_۲ = ۳°C$$

طبق نمودار چگالی برحسب دما متوجه می‌شویم ابتدا چگالی آب افزایش و در نهایت کاهش می‌یابد.



۴۸ درون یک ظرف فلزی با ظرفیت گرمایی $۶۰۰\frac{J}{K}$ و دمای $۳۰^\circ C$، ۲۰۰ گرم آب با دمای $۵۰^\circ C$ می‌ریزیم و یک گرمکن با راندمان ۸۰ درصد و توان $۲۵۰W$ درون آن قرار می‌دهیم. چند ثانیه طول می‌کشد تا در فشار یک جو آب شروع به جوشیدن کند؟

۱) ۳۰۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۴۲۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

گرما

گرما(Q): انرژی‌ای است که به دلیل اختلاف دما از جسم گرم به جسم سرد منتقل می‌شود.

یکای گرما:

$$\text{یکای گرما} = J = \frac{kgm^۲}{s^۲} = N.m \qquad ۱cal = ۴/۱۸۶J$$

گرما یک کمیت نرده‌ای و فرعی است.

اشاره کردن به گرمای موجود در یک جسم اشتباه است چون گرما مربوط به انرژی در حال گذار است.

عبارت نادرست	عبارت درست
جسم دارای ۲۰ ژول گرما است.	جسم ۲۰ ژول گرما از دست داده یا گرفته است.
گرمای جسم زیاد شده است.	۲۰ ژول گرما به جسم منتقل شده است.
گرمای جسم A از جسم B بیشتر است.	گرما از جسم A به جسم B منتقل شده

اگر به جسمی گرما بدهیم دو حالت امکان‌پذیر است:

حالت اول) دمای جسم تغییر کند ولی حالت فاز ثابت بماند.

حالت دوم) دمای جسم ثابت بماند ولی حالت (فاز) تغییر کند.

امکان ندارد تغییر دما و تغییر حالت هم‌زمان با هم اتفاق بیفتد.

حالت اول) گرما باعث تغییر دمای جسم شود: (فاز یا حالت ثابت می‌ماند.)

$$Q = mc\Delta T \qquad Q = C\Delta T$$

Q: انرژی گرمایی m: جرم c: گرمای ویژه ΔT: تغییر دما C: ظرفیت گرمایی

سازگاری یکاها: یکای گرمای ویژه را مبنای انتخاب سایر یکاها قرار دهید:

الف) یکاها در SI

$$Q = m\ c\ \Delta T$$
$$J = kg\ \frac{J}{kg.K}\ K$$

ب) یکاهای متداول

$$Q = m\ c\ \Delta T$$
$$cal = g\ \frac{cal}{g°C}\ °C$$

علامت گرما:

۱) اگر به جسم گرما بدهیم؛ ← انرژی جنبشی ذرات سازنده آن زیاد می‌شود؛ ← انرژی درونی جسم افزایش می‌یابد؛ ← دمای جسم بالا می‌رود.

$$\uparrow T \Rightarrow T_۲ > T_۱ \Rightarrow Q > ۰$$

۲) اگر از جسم گرما بگیریم؛ ← انرژی جنبشی ذرات سازنده آن کم می‌شود؛ ← انرژی درونی جسم کاهش می‌یابد؛ ← دمای جسم پایین می‌رود.

$$\downarrow T \Rightarrow T_۲ < T_۱ \Rightarrow Q < ۰$$

محاسبه توان و راندمان کتری برقی

انرژی گرمایی که کتری به محتویات داخلش می‌دهد همان انرژی (کار) مفید است.

$$\text{توان مفید کتری برقی } P_{\text{مفید}} = \frac{Q}{\Delta t}$$

$$Ra = \frac{\text{انرژی مفید (خروجی)}}{\text{انرژی کل (ورودی)}} \times ۱۰۰ = \frac{\text{توان مفید (خروجی)}}{\text{توان کل (ورودی)}} \times ۱۰۰$$

کتری آرمانی $Ra = ۱۰۰\%$

ابتدا توان مفید گرمکن را محاسبه می‌کنیم:

$$Ra = \frac{P_{مفید}}{P_{کل}} \times ۱۰۰ \rightarrow ۸۰ = \frac{P_{مفید}}{۲۵۰} \times ۱۰۰ \rightarrow P_{مفید} = ۲۰۰\,W$$

برای جوشیدن آب باید دمای مجموعه را به $۱۰۰^\circ C$ برسانیم:

$$۵۰^\circ C \text{ آب } ۲۰۰\,g \rightarrow ۱۰۰^\circ C$$

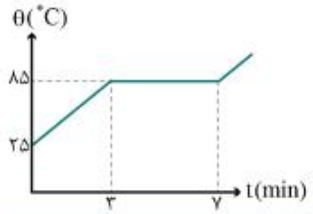
$$Q_۱ = mc\Delta\theta = ۰/۲ \times ۴۲۰۰ \times ۵۰ = ۴۲۰۰۰$$

$$۳۰^\circ C \text{ ظرف} \rightarrow ۱۰۰^\circ C$$

$$Q_۲ = mc\Delta\theta = C\Delta\theta = ۶۰۰ \times ۷۰ = ۴۲۰۰۰$$

$$P = \frac{Q_۱ + Q_۲}{\Delta t} \rightarrow ۲۰۰ = \frac{۴۲۰۰۰ + ۴۲۰۰۰}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = ۴۲۰$$

۴۹ **به جسم جامدی در دمای $۲۵^\circ C$ با گرمکنی با توان خروجی P گرما می‌دهیم و نمودار تغییرات دمای جسم مطابق شکل است. اگر گرمای ویژهٔ نهان ذوب این جسم $۲۴۰\frac{kJ}{kg}$ باشد، گرمای ویژهٔ جسم چند واحد SI است؟**



۱) ۳۰۰۰

۲) ۴۰۰۰

۳) ۴

۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۰۰۴)

تغییر حالت اجسام

در این بخش به بررسی تغییر حالت جسم در اثر گرما می‌پردازیم.

گرمای تغییر حالت:

در این حالت، گرمایی که جسم می‌گیرد یا از دست می‌دهد باعث تغییر دمای آن نمی‌شود، بلکه باعث تغییر فاز (حالت) آن خواهد شد. طرح‌وارهٔ زیر تغییر حالت‌هایی که ممکن است رخ دهند را نشان می‌دهد.

نکته: تغییر فازها می‌توانند گرماگیر $(Q > ۰)$ یا گرماده $(Q < ۰)$ باشند.

- تغییر فاز
  - گرماده: انجماد، چگالش، میعان
  - گرماگیر: ذوب، تصعید، تبخیر

ذوب و انجماد:

در فرایند ذوب، جسم جامد گرما می‌گیرد تا در دمای ثابت، حالت آن از جامد به مایع تغییر کند. گرما در این حالت برابر است با:

$$Q_F = +mL_F \qquad L_F \text{ یکای } : \frac{J}{kg}$$

در رابطهٔ بالا، L_F گرمای نهان ویژهٔ ذوب و انجماد است که وابسته به جنس ماده است.

گرمای نهان ویژهٔ ذوب: مقدار گرمایی است که یک کیلوگرم از جامد می‌گیرد تا بدون تغییر دما به مایع تبدیل شود.

در فرایند انجماد، جسم مایع گرما از دست می‌دهد تا در دمای ثابت، حالت آن از مایع به جامد تبدیل شود. گرمای مبادله شده در این حالت، قرینهٔ گرمای ذوب است.

$$Q_{\text{انجماد}} = -mL_F \qquad Q_{\text{انجماد}} < 0$$

مثال: به $2kg$ یخ با دمای $-20^\circ C$، چند ژول گرما دهیم تا به آب با دمای $80^\circ C$ تبدیل شود؟

$$\left(L_F = 336\frac{kJ}{kg}\ ,\ c_{\text{آب}} = 4200\frac{J}{kg.K}\ ,\ c_{\text{یخ}} = 2100\frac{J}{kg.K}\right)$$

خب از این‌جا به بعد مسائل می‌تونن هم گرمای تغییر دما داشته باشن و هم گرمای تغییر حالت، پس باید به نوبت این گرماها محاسبه بشن...

مطابق شکل زیر می‌توانیم گرمای مورد نیاز را به دست آوریم.

$$Q_1 = mc_{\text{یخ}}\Delta\theta = 2\times 2100\times 20 = 20\times 4200\,J$$

$$Q_2 = mL_F = 2\times \overbrace{336000}^{80\times 4200} = 160\times 4200\,J$$

$$Q_3 = mc_{\text{آب}}\Delta\theta = 2\times 4200\times 80 = 160\times 4200\,J$$

$$\rightarrow Q_{\text{کل}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 340\times 4200\,J$$

تبخیر و میعان:

در فرایند تبخیر، جسم مایع گرما می‌گیرد تا در دمای ثابت، حالت آن از مایع به بخار (گاز) تغییر کند. دقت کنید که تبخیر در هر دمایی می‌تواند رخ دهد. برای محاسبهٔ گرمای تبخیر داریم:

$$Q_V = mL_V \qquad L_V \text{ یکای: } \frac{J}{kg}$$

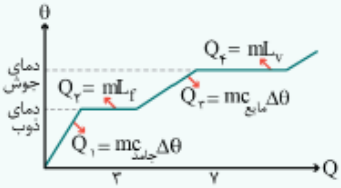
در رابطهٔ بالا، L_V گرمای نهان ویژهٔ تبخیر و میعان است که وابسته به جنس ماده و دمای آن است.

گرمای نهان ویژهٔ تبخیر: مقدار گرمایی است که یک کیلوگرم از مایع می‌گیرد تا بدون تغییر دما به بخار تبدیل شود.

در فرایند میعان که برعکس تبخیر است، جسم گرما از دست می‌دهد تا در دمای ثابت از گاز به مایع تبدیل شود. گرمای مبادله شده در این حالت، قرینهٔ گرمای تبخیر است و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$Q_{\text{میعان}} = -mL_V \qquad Q_{\text{میعان}} < 0$$

به عنوان آخرین نکته، فرض کنید به جسم جامدی گرما بدهیم تا دمای آن بالا برود، سپس ذوب شود، دوباره دمای آن بالا برود و در نهایت بخار شود. نمودار تغییرات دمای آن برحسب گرمای گرفته شده به شکل زیر خواهد شد:



اگر جسم با کمک یک گرمکن رسم شود، این نمودار را می‌توان برحسب زمان نیز رسم کرد.

پاسخ تشریحی:

در ۳ دقیقهٔ اول، دمای جسم جامد بالا می‌رود و در ۴ دقیقهٔ بعدی، جسم ذوب می‌شود.

۳ دقیقهٔ اول: $Q_1 = mc\Delta\theta \rightarrow P\times 3 = mc\times(85-25)$

۴ دقیقهٔ بعدی: $Q_2 = mL_F \rightarrow P\times 4 = m\times 240\times 10^3$

با تقسیم رابطهٔ دوم بر رابطهٔ اول داریم:

$$\frac{4P}{3P} = \frac{240\times 10^3}{c\times 60} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{4000}{c} \rightarrow c = 3000\frac{J}{kg.K}$$

۵۰ **یک حباب هوا به شعاع $5mm$ در ته یک دریاچه به عمق h تشکیل شده است که دما در آن‌جا $3^\circ C$ است. حباب تا سطح آب بالا می‌آید که دما در آن‌جا $27^\circ C$ است. اگر تا لحظه‌ای که حباب به سطح دریاچه می‌رسد، شعاع آن $1mm$ افزایش یافته باشد، h چند متر است؟**

$$\left(g = 10\frac{N}{kg}\ ,\ P_0 = 10^5\,Pa\ ,\ \rho_{\text{آب}} = 1\frac{g}{cm^3}\right)$$

۱) ۱۸/۵۴ ۲) ۱۵/۸۴ ۳) ۵/۸۴ ۴) ۸/۵۴

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی و ترکیبی ـ ۱۰۰۴)

پاسخ تشریحی:

برای حل این سؤال از قانون گازهای کامل استفاده می‌کنیم.

$$\text{کف دریاچه}: \begin{cases} P_1 \\ V_1 = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 \, mm^3 \\ T_1 = 2 + 273 = 275K \end{cases}$$

$$\text{سطح دریاچه}: \begin{cases} P_2 = P_0 = 10^5 Pa \\ V_2 = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 \, mm^3 \\ T_2 = 27 + 273 = 300K \end{cases}$$

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \rightarrow \frac{P_1 \times \frac{4}{3}\pi \times 5^3}{275} = \frac{10^5 \times \frac{4}{3}\pi \times 6^3}{300}$$

$$\rightarrow \frac{P_1 \times 5^3}{275} = \frac{10^5 \times 6^3}{300} \rightarrow P_1 = \frac{275 \times 216}{300 \times 125} \times 10^5 Pa$$

$$\rightarrow P_1 = \frac{396}{250} \times 10^5 Pa = 1/584 \times 10^5 Pa$$

$$P_1 = P_0 + \rho gh \Rightarrow 1/584 \times 10^5 = 10^5 + 1000 \times 10 \times h \rightarrow h = 5/84m$$